工程數學・課堂例題總整理 / 原稿 23 頁、32 題：完整題目、計算過程、答案

① p.1 **複數四則**

題 設 $z_1 = 8+3i$、$z_2 = 9-2i$・求 $\mathrm{Re}(z_1)$、$\mathrm{Im}(z_1)$、z_1+z_2、z_1z_2。

解：$\mathrm{Re}\, z_1 = 8$、$\mathrm{Im}\, z_1 = 3$（讀係數）；$z_1+z_2 = (8+9)+(3-2)i = 17+i$；$z_1z_2 = 72-16i+27i-6i^2 = 72+11i+6 = 78+11i$（$-6i^2 = +6$）

② p.1 **複數除法**

題 設 $z_1 = 8+3i$、$z_2 = 9-2i$・求 $\dfrac{z_1}{z_2}$。

解：上下同乘共軛 $9+2i \Rightarrow \dfrac{(8+3i)(9+2i)}{9^2+2^2} = \dfrac{72-6+16i+27i}{85} = \dfrac{66}{85}+\dfrac{43}{85}i$

③ p.1 **共軛取虛部**

題 設 $z_1 = 4+3i$、$z_2 = 2+5i$・用 $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{1}{2i}(z_1-\bar{z}_1)$ 求 $\mathrm{Im}(z_1)$。

解：$\bar{z}_1 = 4-3i \Rightarrow z_1-\bar{z}_1 = (4+3i)-(4-3i) = 6i \Rightarrow \mathrm{Im}\, z_1 = \dfrac{6i}{2i} = 3$（實部互消・只留虛部）

④ p.2 **$z = 1+i$ 化極式**

題 設 $z = 1+i$・求極式、$|z|$、主值 $\mathrm{Arg}\, z$ 與一般角 $\arg z$。

解：$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$；第一象限且 $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$；一般角 $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}+2n\pi$

⑤ p.3 **$\sqrt[3]{1}$**

題 求 $\sqrt[3]{1}$ 的三個解・並在複數平面上畫出它們的位置。

解：$1 = e^{i0} \Rightarrow$ 角度 $\frac{0+2k\pi}{3} = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$（$k = 0,1,2$）・半徑 $1 \Rightarrow 1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$（三點把單位圓三等分）

⑥ p.3 **$\sqrt[5]{1}$**

題 求 $\sqrt[5]{1}$ 的一般式・並說明 5 個解在複數平面上的位置。

解：$\sqrt[5]{1}$：$r = 1$、$\theta = 0 \Rightarrow$ 角度 $\frac{0+2k\pi}{5}$・$k = 0,\dots,4 \Rightarrow e^{i2k\pi/5} = \cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$（單位圓五等分・正五邊形）。延伸：同一招可開 $\sqrt{i}$（$i = e^{i\pi/2}$）$\Rightarrow$ 角度 $\frac{\pi/4+2k\pi}{2} = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \Rightarrow \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

⑦ p.4 **$w = z^2+3z$・$z = 1+3i$**

題 設 $w = f(z) = z^2+3z$・求 $u(x,y)$、$v(x,y)$・並求 $z = 1+3i$ 時的 $f(z)$。

解：$(1+3i)^2 = 1+6i+9i^2 = -8+6i$；$3(1+3i) = 3+9i$；相加 $= -5+15i$。分離式：$u = x^2-y^2+3x$、$v = 2xy+3y$・代 $(x,y) = (1,3)$ 得 $u = 1-9+3 = -5$、$v = 6+9 = 15$ ✓

⑧ p.4 **向量與長度**

題 設 $P(4,0,2)$、$Q(6,-1,2)$・求 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $|\overrightarrow{PQ}|$。

解：$\overrightarrow{PQ} = Q-P = (6-4,\ -1-0,\ 2-2) = (2,-1,0)$；$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{5}$

⑨ p.4 **向量加法（分量）**

題 設 $\vec{a} = [4,0,1]$、$\vec{b} = [2,5,\frac{1}{3}]$・求 $\vec{a}+\vec{b}$。

解：對應位置相加 $= [4+2,\ 0+5,\ 1+\frac{1}{3}] = [6,5,\frac{4}{3}]$

⑩ p.4 **向量加法（$\hat{i}\hat{j}\hat{k}$）**

題 設 $\vec{a} = 4\hat{i}+\hat{k}$、$\vec{b} = 2\hat{i}-5\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$・求 $\vec{a}+\vec{b}$。

解：（$\hat{i}\hat{j}\hat{k}$）寫法一樣是分量相加・看出 $\vec{a}$ 沒有 $\hat{j}$ 項（$\hat{j}$ 分量為 0）$\Rightarrow (4+2)\hat{i}+(0-5)\hat{j}+(1+\frac{1}{3})\hat{k} = 6\hat{i}-5\hat{j}+\frac{4}{3}\hat{k}$；對照 ⑨（分量式）答案 $= [6,-5,\frac{4}{3}]$ 完全相同

⑪ p.5 **內積與夾角**

題 設 $\vec{a} = [1,2,0]$、$\vec{b} = [3,-2,1]$・求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$、$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$ 與夾角 θ。

解：$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1(3)+2(-2)+0(1) = 3-4+0 = -1$；$|\vec{a}| = \sqrt{5}$、$|\vec{b}| = \sqrt{14}$；$\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{70}} \approx -0.1195 \Rightarrow \theta \approx 96.9°$（負值 = 鈍角）

⑫ p.5 **外積**

題 設 $\vec{a} = [1,1,0]$、$\vec{b} = [3,0,0]$・求 $\vec{a}\times\vec{b}$ 及其長度（= 兩向量張出的平行四邊形面積）。

解：$\vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(1\cdot0-0\cdot0)-\hat{j}(1\cdot0-0\cdot3)+\hat{k}(1\cdot0-1\cdot3) = 0\hat{i}-0\hat{j}-3\hat{k} = (0,0,-3)$・面積 $|\vec{a}\times\vec{b}| = 3$

⑬ p.7 **方向導數**

題 設 $f(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2$・在點 $P(2,1,3)$、沿方向 $\vec{a} = [1,0,-2]$・求方向導數 $D_{\vec{a}}f$。

解：$\nabla f = [4x,6y,2z] \Rightarrow \nabla f(P) = (8,6,6)$；$|\vec{a}| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \Rightarrow D_{\vec{a}}f = \dfrac{[1,0,-2]}{\sqrt{5}}\cdot[8,6,6] = \dfrac{8+0-12}{\sqrt{5}} = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \approx -1.789$（負值 = 往這個方向走・函數值是下降的）

⑭ p.7 **錐面單位法向量**

題 求迴轉錐面 $z^2 = 4(x^2+y^2)$ 在點 $P(1,0,2)$ 的單位法向量 $\hat{n}$。

解：移項 $f = 4(x^2+y^2)-z^2 = 0$；$\nabla f = [8x,8y,-2z] \Rightarrow \nabla f(P) = (8,0,-4)$；$|\nabla f(P)| = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5} \Rightarrow \hat{n} = \pm\left[\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

⑮ p.9 **旋度**

題 設向量函數 $\vec{v} = [yz,\ 3zx,\ z] = yz\,\hat{i}+3zx\,\hat{j}+z\,\hat{k}$・求 $\mathrm{curl}\,\vec{v} = \nabla\times\vec{v}$。

解：$\nabla\times\vec{v} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right) = (0-3x)\hat{i}+(y-0)\hat{j}+(3z-z)\hat{k} = [-3x,\ y,\ 2z]$（$y$ 那一項來自 $\frac{\partial(yz)}{\partial z} = y$）

⑯ p.10 **保守場線積分**

題 設 $\vec{F} = [2x,2y,4z]$、$f = x^2+y^2+2z^2$（$\vec{F} = \nabla f$）；取 $A(1,1,1)$、$B(0,0,0)$。若有一路徑 $C: \vec{r}(t) = [t,t,t]$、$0 \le t \le 2$・求 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$。

解（硬算）：$\vec{F}(\vec{r}(t)) = [2t,2t,4t]$、$\vec{r}' = [1,1,1] \Rightarrow$ 內積 $= 2t+2t+4t = 8t \Rightarrow \int_0^2 8t\,dt = 4t^2\big|_0^2 = 16$。解（位勢）：端點 $(0,0,0) \to (2,2,2) \Rightarrow f(2,2,2)-f(0,0,0) = (4+4+8)-0 = 16$ ✓

⑰ p.10 **非保守場線積分**

題 設 $\vec{F} = [-y,\ -xy]$；C 為單位圓上由 $(1,0)$ 逆時針走到 $(0,1)$ 的第一象限弧（$x = \cos t$、$y = \sin t$、$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$）・求 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$。

解：$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = [-\sin t,\ -\cos t\sin t]$、$\vec{r}' = [-\sin t,\ \cos t] \Rightarrow$ 內積 $= \sin^2 t-\cos^2 t\sin t \Rightarrow \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt-\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \frac{\pi}{4}-\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3} \approx 0.4521$

⑱ p.11 **格林定理**

題 設 $F_1 = y^2-7y$、$F_2 = 2xy+2x$、$C: x^2+y^2 = 1$（逆時針）。用格林定理驗證 $\displaystyle\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_C (F_1\,dx+F_2\,dy)$（兩邊都算）。

解（格林）：$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y+2$、$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y-7 \Rightarrow$ 差 $= 9 \Rightarrow \iint_R 9\,dA = 9\times$（圓面積 π）$= 9\pi$。解（參數化）：$F_1 = \sin^2 t-7\sin t$、$F_2 = 2\cos t\sin t+2\cos t \Rightarrow \oint(F_1x'+F_2y')dt = \int_0^{2\pi}(-\sin^3 t+7\sin^2 t+2\cos^2 t\sin t+2\cos^2 t)dt = 0+7\pi+0+2\pi = 9\pi$ ✓

⑲ p.13 **推導：Laplacian 的面積分 = 法向導數線積分**

題 設 f 有二階連續偏導、C 是區域 R 的邊界、s 為弧長・法向導數 $\dfrac{\partial f}{\partial n} = (\mathrm{grad}\, f)\cdot\hat{n}$。證明 $\displaystyle\iint_R \nabla^2 f\,dA = \oint_C \frac{\partial f}{\partial n}\,ds$。

解：要讓 $\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} = f_{xx}+f_{yy}$ ⇒ 取 $F_2 = f_x$、$F_1 = -f_y$ ⇒ 套格林 $\iint\nabla^2 f\,dA = \oint(-f_y\,dx+f_x\,dy)$ ⇒ 寫成弧長參數 $= \oint\left(-f_y\frac{dx}{ds}+f_x\frac{dy}{ds}\right)ds = \oint\nabla f\cdot\hat{n}\,ds = \oint\frac{\partial f}{\partial n}ds$（$\hat{n} = (\frac{dy}{ds},-\frac{dx}{ds})$）

⑳ p.14 **高斯散度定理**

題 設 $\vec{F} = [x^3,x^2y,x^2z]$・$T$ 是半徑 a、高 h 的圓柱（$0 \le z \le h$、$x^2+y^2 = a^2$）。用散度定理求通量 $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iiint_T \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV$。

解：$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial x^3}{\partial x}+\frac{\partial(x^2y)}{\partial y}+\frac{\partial(x^2z)}{\partial z} = 3x^2+x^2+x^2 = 5x^2$；換柱座標 $x = \rho\cos\varphi$、$dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \Rightarrow \iiint 5\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = 5\left(\int_0^h dz\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^a\rho^3 d\rho\right) = 5\cdot h\cdot\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{5\pi a^4h}{4}$

㉑ p.15 **斯托克斯定理**

題 設 S 為 $z = f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$ 且 $z \ge 0$ 的部分（一個碗形蓋）・$\vec{F} = [y,z,x]$。用斯托克斯定理驗證 $\displaystyle\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$。

左（邊界）：$z = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$；令 $x = \cos s,\ y = \sin s \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = [\sin s,0,\cos s]$、$\vec{r}' = [-\sin s,\cos s,0] \Rightarrow \oint = -\int_0^{2\pi}\sin^2 s\,ds = -\pi$。右（曲面）：$\nabla\times\vec{F} = (-1,-1,-1)$、$\nabla\phi = [2x,2y,1] \Rightarrow \iint(-2x-2y-1)dxdy$・其中 $\iint 2x\,dA = \iint 2y\,dA = 0$（對稱）$\Rightarrow -\iint dA = -\pi$ ✓

㉒ p.16 **寫成 $A\vec{x} = \vec{B}$**

題 把方程組 $4x_1+6x_2+9x_3 = 6$、$6x_1-2x_3 = 20$、$5x_1-8x_2+x_3 = 10$ 寫成 $A\vec{x} = \vec{B}$・並說出未知數與方程式各有幾個。

解：第二式沒有 $x_2 \Rightarrow$ 係數補 0 $\Rightarrow A = \begin{bmatrix}4&6&9\\6&0&-2\\5&-8&1\end{bmatrix}$、$\vec{B} = [6,20,10]^T$、$\vec{x} = [x_1,x_2,x_3]^T$；解得 $\vec{x} = [3,\frac{1}{2},-1]^T$（回代：$12+3-9 = 6$、$18+2 = 20$、$15-4-1 = 10$ ✓）

㉓ p.17 **矩陣乘法 AB**

題 設 $A = \begin{bmatrix}3&5&-1\\4&0&2\\-6&-3&2\end{bmatrix}$、$B = \begin{bmatrix}2&-2&3&1\\5&0&7&8\\9&-4&1&1\end{bmatrix}$・求 AB。

解（列乘行・逐格）：$C_{11} = 3(2)+5(5)+(-1)(9) = 22$；$C_{12} = 3(-2)+0+(-1)(-4) = -2$；$C_{13} = 9+35-1 = 43$；$C_{14} = 3+40-1 = 42$；$C_{21} = 8+0+18 = 26$；$C_{22} = -8+0-8 = -16$；$C_{23} = 12+0+2 = 14$；$C_{24} = 4+0+2 = 6$；$C_{31} = -12-15+18 = -9$；$C_{32} = 12+0-8 = 4$；$C_{33} = -18-21+2 = -37$；$C_{34} = -6-24+2 = -28 \Rightarrow AB = \begin{bmatrix}22&-2&43&42\\26&-16&14&6\\-9&4&-37&-28\end{bmatrix}$

㉔ p.17 **轉置**

題 設 $A = \begin{bmatrix}5&-8&1\\4&0&0\end{bmatrix}$・求轉置 A^T。

解：列變行、行變列 $\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix}5&4\\-8&0\\1&0\end{bmatrix}$（$2\times3$ 轉置後變 3×2：$a_{13} = 1$ 搬到 $(3,1)$ 的位置）

㉕ p.18 **二元方程組（列運算）**

題 解方程組 $2x_1+5x_2 = 2$、$-4x_1+3x_2 = -30$（用列運算把增廣矩陣化簡）。

解：增廣矩陣 $\left[\begin{array}{cc|c}2&5&2\\-4&3&-30\end{array}\right]$；$R_2+2R_1$（把 -4 消掉）$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}2&5&2\\0&13&-26\end{array}\right] \Rightarrow 13x_2 = -26 \Rightarrow x_2 = -2$；代回 $2x_1+5(-2) = 2 \Rightarrow 2x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -2$

㉖ p.18 **電路三條方程式**

題 雙迴路電路：左支路 80 V、右支路 90 V 電源・電阻 20Ω、25Ω、10Ω、15Ω；迴路電流記為 x_1,x_2,x_3。寫出方程組並求解。

解：$R_3-20R_1 = [0,30,-20\mid80]$、$R_4 = [0,10,25\mid90]$；交換得 $[0,10,25\mid90]$ 在上 $\Rightarrow R_3-3R_2 = [0,0,-95\mid-190] \Rightarrow -95x_3 = -190 \Rightarrow x_3 = 2$；回代 $10x_2+25(2) = 90 \Rightarrow 10x_2 = 40 \Rightarrow x_2 = 4$；$x_1-4+2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow (x_1,x_2,x_3) = (2,4,2)$

㉗ p.19 **無限多組解的情況**

題 解方程組並判斷解的情形（4 個未知數、3 條方程式・小數係數；原稿以增廣矩陣給出）

$\left[\begin{array}{cccc|c}3&2&2&-5&8\\0.6&1.5&1.5&-5.4&2.7\\1.2&-0.3&-0.3&2.4&2.1\end{array}\right]$

解：$R_2-0.2R_1 = [0,\ 1.1,\ 1.1,\ -4.4\mid1.1]$、$R_3-0.4R_1 = [0,\ -1.1,\ -1.1,\ 4.4\mid-1.1]$；$R_3+R_2$ 得到整列 0（$0 = 0$ 是廢話・這條方程式沒提供新資訊）$\Rightarrow$ 4 個未知數只有 2 個獨立條件 $\Rightarrow$ **無限多組解**（可自由選 2 個變數當參數）

㉘ p.19 **無解的情況**

題 解方程組並判斷解的情形：$3x_1+2x_2+x_3 = 3$、$2x_1+x_2+x_3 = 0$、$6x_1+2x_2+4x_3 = 6$。

解：把 R_3 換到第一列（原稿先交換）$\Rightarrow R_2-\frac{1}{3}R_1 = [0,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\mid-2]$、$R_3-\frac{1}{2}R_1 = [0,1,-1\mid0] \Rightarrow 3R_2-R_3 = [0,0,0\mid-6] \Rightarrow 0 = -6$ 矛盾 $\Rightarrow$ **無解**（方程組不一致・係數矩陣的秩 $\neq$ 增廣矩陣的秩）

㉙ p.20 **求秩**

題 求 Rank A（原稿把常數行一起列運算）$\left[\begin{array}{ccc|c}3&0&2&2\\-6&42&24&54\\21&-21&0&15\end{array}\right]$；作業：$A = \begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\0&1&1\end{bmatrix}$・求 Rank A 與 Rank A^T。

解：$R_2+2R_1 = [0,42,28\mid58]$、$R_3-7R_1 = [0,-21,-14\mid1]$；係數後兩列成 $-\frac{1}{2}$ 比例 $\Rightarrow$ 只有 2 個獨立列 $\Rightarrow$ Rank $A = 2$（常數 58 與 -29 不成比例 $\Rightarrow$ 無解）。作業：第 2 列 $= 2\times$ 第 1 列 $\Rightarrow$ Rank $= 2$

㉚ p.21 **3×3 行列式**

題 求三階行列式 $D = \begin{vmatrix}1&3&0\\2&6&4\\-1&0&2\end{vmatrix}$（用餘因子展開）。

解（沿第一列餘因子展開）：$D = 1\cdot\begin{vmatrix}6&4\\0&2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}2&4\\-1&2\end{vmatrix}+0\cdot(\dots) = 1(12-0)-3(4+4)+0 = 12-24 = -12$（第三項乘 0 不用算）

㉛ p.22 **克拉瑪公式解 ㉕**

題 用克拉瑪公式解 ㉕ 那一組 $2x_1+5x_2 = 2$、$-4x_1+3x_2 = -30$（原稿先寫一般式 $a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$、$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$・再代數字）。

解：$\det A = \begin{vmatrix}2&5\\-4&3\end{vmatrix} = 6+20 = 26$；$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix}2&5\\-30&3\end{vmatrix}}{26} = \dfrac{6+150}{26} = \dfrac{156}{26} = 6$；$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix}2&2\\-4&-30\end{vmatrix}}{26} = \dfrac{-60+8}{26} = -2$

㉜ p.23 **反矩陣（Gauss–Jordan）**

題 設 $A = \begin{bmatrix}-1&1&2\\3&-1&1\\-1&3&4\end{bmatrix}$・用 $[A\mid I] \to [I\mid A^{-1}]$ 求 A^{-1}。

解：寫 $[A|I]$；$R_2+3R_1 = [0,2,7\mid3,1,0]$、$R_3-R_1 = [0,2,2\mid-1,0,1]$；繼續用列運算把左半清成 I（右半同步做）$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}-0.7&0.2&0.3\\-1.3&-0.2&0.7\\0.8&0.2&-0.2\end{bmatrix}$（$\det A = 10$；驗算 $(AA^{-1})_{11} = 0.7+0.6-0.3 = 1$ ✓、$(AA^{-1})_{12} = -0.7-0.2+0.9 = 0$ ✓）

工程數學・重點整理 / 全 23 頁公式・每條都附白話翻譯（棕）與易錯提醒（紅）

1 複數與四則運算 p.1

$i=\sqrt{-1}$・即 $i^2=-1$；$z=x+iy$ 白話：i 的意思是「把箭頭轉 90°」・所以 i^2 就是轉 180° = 變成負號。

$\mathrm{Re}\,z=x$、$\mathrm{Im}\,z=y$ 虛部是實數 y・不含 i；$x=0$ 叫純虛數、實部虛部都是實數。

乘法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 白話：照多項式展開・遇到 i^2 就換成 -1。

除法 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$・$z\bar{z}=x^2+y^2$ 白話：跟 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 有理化同一招——上下同乘分母的共軛・把分母的 i 消掉變成實數。

共軛 $\bar{z}=x-iy$：$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\bar{z}}{2}$、$\mathrm{Im}\,z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$；$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$、$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$　但 $\mathrm{Re}(z_1z_2)\neq\mathrm{Re}\,z_1\cdot\mathrm{Re}\,z_2$

2 極式與歐拉公式 p.2

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$；$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 白話：同一個點換一種說法——不講「往右多少、往上多少」・改說「朝 θ 方向走 r 步」。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$；歐拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 白話：指數與角度能互相換算・這就是「極式相乘 = 角度相加」的來源（來自和角公式）。

$\mathrm{Arg}\,z$ = 全部角度（彼此差 $2n\pi$）；$\arg z$ = 主值・只取 $-\pi<\theta\le\pi$ 題目問 arg 就要寫 $+2n\pi$。

四軸直接背：$1=e^{i0}$、$i=e^{i\pi/2}$、$-1=e^{i\pi}$、$-i=e^{i3\pi/2}$　求 θ：先算參考角・再看落在第幾象限決定加多少。

3 乘除、棣美弗、方根 p.3

$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$；$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$；$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ 白話：長度相乘（除）、角度相加（減）。

棣美弗 $z^n=r^ne^{in\theta}=r^n[\cos n\theta+i\sin n\theta]$ 白話：n 次方 = 角度放大 n 倍（所以 $(1+i)^8$ 直接變 16）。

方根 $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n}$・$k=0,\dots,n-1$ 白話：開 n 次方有 n 個答案・因為「繞圈」也要算；它們在半徑 $\sqrt[n]{r}$ 的圓上等分（正 n 邊形）。角度是 $\frac{\theta+2k\pi}{n}$・不是 $\frac{\theta}{n}+2k\pi$

4 複變函數 p.4

$w=f(z)=u+iv$・$u=u(x,y)$、$v=v(x,y)$ 白話：一個複數輸入 z 同時決定兩個實數（實部、虛部）・像把輸入平面上的點搬到輸出平面。

驗算方法：把 (x,y) 代進 u,v・答案要和直接把 z 代進 f 一樣（例題 ⑦ 就是這樣對出來的）。

5 向量 p.4–6

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；$\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$（長度壓成 1）；$\overrightarrow{PQ}=Q-P$

內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 白話：問「兩支箭有多像」——同向為正、垂直為零、反向為負；結果是一個數。$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff$ 垂直

外積 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$・$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ 白話：把 $\vec{a}$ 放桌上、$\vec{b}$ 掃過去・$\vec{a}\times\vec{b}$ 是「往上」那支箭・長度 = 兩向量張出的平行四邊形面積。只有三維有外積；$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

位置向量 $\vec{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$；$\vec{r}'(t)$ = 切向量（方向 = 前進方向、大小 = 速率）；弧長 $L=\int_a^b|\vec{r}'(t)|\,dt$ 白話：把速率積分起來・就是走了多遠。

6 梯度與方向導數 p.7

$\nabla f=[f_x,f_y,f_z]$；算子 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$ 白話：把 f 想成一座山的高度・∇f 就是「往哪走最陡」・它的長度 = 那個最大坡度。

方向導數 $D_{\vec{a}}f=\hat{a}\cdot\nabla f=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\nabla f=|\nabla f|\cos\phi$ 白話：硬往 $\vec{a}$ 方向走的坡度；朝梯度方向走最大。方向向量一定要先單位化

$f(x,y,z)=c$ 的曲面：∇f 垂直曲面・$\hat{n}=\pm\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ 白話：沿等高線走高度不變（$\nabla f\cdot\vec{r}'=0$）・所以梯度必垂直等高線。方向沒指定時 ± 都要寫

7 散度、旋度、Laplacian p.8–9

散度 $\nabla\cdot\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$（純量）白話：在這一點放一個小水龍頭——流出（正）是水源、吸入（負）是排水孔、零 = 不可壓縮。每個分量只對自己的變數微分（v_1 對 x、v_2 對 y）

旋度 $\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$（向量）白話：放一個小風車・看它會不會被這股流轉起來；轉得越凶旋度越大。$\hat{j}$ 那一項有負號・最保險是先把三個分量公式抄在紙邊再逐格填

三個分量的展開式：$\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\hat{i}-\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\hat{k}$

Laplacian $\nabla^2f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f)$ 白話：每個方向各微分兩次再相加；名字的意思就是「梯度的散度」。

$\nabla\times(\nabla f)=\vec{0}$、$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})=0$ 白話：梯度場不會打轉（因為混合偏導數 $f_{xy}=f_{yx}$ 成對抵消）——判斷是不是保守場最快的工具。

8 線積分 p.10–11

$\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt=\int_a^b(F_1x'+F_2y'+F_3z')dt$ 白話：沿著路走・把每一小步的「力 · 位移」加起來 = 總共做了多少功。

固定四步：①參數化 $\vec{r}(t)$ 並寫出 t 範圍 ②把 $\vec{F}$ 裡的 x,y,z **全部換成** t ③微分出 $\vec{r}'(t)$ 後內積 ④對 t 做定積分。

保守場：$\vec{F}=\nabla f\iff\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=0\iff$ 路徑無關；此時 $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=f(\text{終})-f(\text{起})$ 白話：只看頭尾・中間怎麼繞都一樣（像爬山只看起點與終點的高度差）。

線性性質：$\int_C(\vec{F}+\vec{G})\cdot d\vec{r}=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_C\vec{G}\cdot d\vec{r}$；$\int_{C_1+C_2}=\int_{C_1}+\int_{C_2}$ 白話：把長路徑切幾段・總功 = 各段相加。

常用積分技巧：$\int\sin^2t\,dt$（或 $\cos^2$）用半角公式 $\frac{1-\cos2t}{2}$；$\int\cos^2t\sin t\,dt$ 令 $u=\cos t$ 代換。

9 格林定理 p.11

$\oint_C(F_1\,dx+F_2\,dy)=\iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA$ 白話：沿著邊界走一圈量到的總量・等於把界內每一小塊的「小旋轉」全部加起來（繞操場一圈的風 = 所有小旋風的總和）。

右邊括號就是 $(\nabla\times\vec{F})$ 的 z 分量；C 取**逆時針**為正向 順時針要變號

妙用：$\iint_R1\,dA=\oint_C x\,dy$（用線積分算面積）；被積函數若 y 項互消・通常只剩常數×面積 例題 ⑱ 就是這樣一眼看出 9π。

10 座標系與表面積分 p.12–13

柱座標 (ρ,φ,z)：$x=\rho\cos\varphi$、$y=\rho\sin\varphi$、$z=z$・$dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$ 白話：換量尺要補「比例因子」——越外圈・同樣角度走過的實際長度越長・所以要乘 ρ。

球座標 (r,θ,φ)：$x=r\sin\theta\cos\varphi$、$y=r\sin\theta\sin\varphi$、$z=r\cos\theta$・$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$ 忘掉 $r^2\sin\theta$ 是最常見的錯

球面參數式 $\vec{F}(u,v)=a\cos v\cos u\,\hat{i}+a\cos v\sin u\,\hat{j}+a\sin v\,\hat{k}$（$u$ 繞一圈、v 上下爬）；$|\vec{F}|=a$ 檢查法：代 $v=\frac{\pi}{2}$ 得北極 $(0,0,a)$、代 $v=0$ 得赤道 $x^2+y^2=a^2$。

曲面 $z=g(x,y)$ 的面積元素 $dA=\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy$ 白話：曲面是斜的・實際面積比投影大・根號就是放大率（平面時根號 = 1）。

$\iint_R\nabla^2f\,dA=\oint_C\frac{\partial f}{\partial n}ds$ 白話：區域內「與鄰居的平均差」= 邊界上法線方向的變化量總和；$\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot\hat{n}$・取 $F_1=-f_y$、$F_2=f_x$ 套格林即可（例題 ⑲）。

11 高斯散度定理 p.14

$\iint_S\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA=\iiint_T\nabla\cdot\vec{F}\,dV$ 白話：想知道氣球裡有多少空氣在往外跑？不用鑽進去——在表面量「往外流的總量」就好。

通量的座標形式 $\iint_S(F_1\,dy\,dz+F_2\,dz\,dx+F_3\,dx\,dy)$；$\hat{n}=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]$ 朝外・S 必須**封閉**

解題順序：題目給封閉曲面求通量 ⇒ ①先算散度（比算三個面快十倍）②再換座標 ③別忘了 dV 的比例因子。不封閉就不能用・得老實算面積分或自己補蓋子

12 斯托克斯定理 p.15

$\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA$ 白話：想知道一片帆布上有多少小旋轉・不必整片檢查——沿著邊緣走一圈就知道了。

C 的繞向與 $\hat{n}$ 要符合右手定則 方向反了兩邊同時變號；格林定理是它在平面（$\hat{n}=\hat{k}$）上的特例

對稱偷懶法：$\iint_Rx\,dA=\iint_Ry\,dA=0$（區域對原點對稱時）——例題 ㉑ 的右邊因此只剩 $-\iint dA=-\pi$。

13 矩陣與線性方程組 p.16–19

元素 a_{jk}：j = 第幾列、k = 第幾行；乘法尺寸 $[m\times n][n\times p]=[m\times p]$・**中間的 n 要相同、乘完消失**

$AB\neq BA$；$A+B$ 要同 size；cA 每個元素都乘 c。

矩陣乘法怎麼算：$C_{jk}=$（A 第 j 列）·（B 第 k 行）・對應相乘再相加 白話：橫的乘直的；先畫好答案的空格（$m\times p$）再逐格填・才不會漏。

轉置 $(A^T)^T=A$、$(A+B)^T=A^T+B^T$、$(cA)^T=cA^T$、$(AB)^T=B^TA^T$（順序要反）；$A^T=A$ 叫對稱矩陣、$A^T=-A$ 叫反對稱。

有名字的矩陣：對角（非對角線全 0）、上 / 下三角、純量（對角線同值）、單位 I（矩陣界的 1・$IA=AI=A$）。

$A\vec{x}=\vec{B}$：把係數排成表（**缺的項補 0**）、常數併成增廣矩陣 $[A\mid\vec{B}]$；三種列運算 = ①互換兩列 ②某列乘非零常數 ③某列加另一列的倍數——都不改變解 白話：就是國中的加減消去法・只是寫整齊一點。

解的判別：出現 $0=$ 非零的矛盾列 ⇒ **無解**（不一致）；$p=m=n$ ⇒ **唯一解**（此時 $\det A\neq0$）；$p<n$ ⇒ **無限多組解**（把多的未知數當自由參數）p = 化簡後的非零列數。

14 線性獨立與秩 p.20

$c_1a_1+\cdots+c_na_n=\vec{0}$ 只有全 $c_i=0$ 才成立 ⇒ 線性獨立 白話：每支箭都提供新方向；若有不全為零的解就叫線性相關 = 至少有一支是多餘的（別人的組合）。

Rank = 獨立列的最大個數 = 獨立行的最大個數；$\mathrm{Rank}\,A=\mathrm{Rank}\,A^T\le\min(m,n)$；全零矩陣 Rank = 0、非零矩陣 ≥1。

算法：列運算化成階梯型（左上往右下排）・數留下幾個非零列。$\mathrm{Rank}\,A<\mathrm{Rank}[A\mid\vec{B}]$ ⇒ 無解。

15 行列式 p.21

$n=2$：$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$（主對角減副對角）；$n\ge3$：$D=\sum_k(-1)^{j+k}a_{jk}M_{jk}$（固定第 j 列展開）白話：把一個方陣壓縮成一個數字。

Minor M_{jk} = 刪掉第 j 列與第 k 行剩下的行列式；Cofactor $C_{jk}=(-1)^{j+k}M_{jk}$ 選 0 最多的那一列展開；正負號用符號棋盤（左上為 +・像西洋棋交替）。

性質：兩列（行）相同或成比例 ⇒ $D=0$；轉置不變 $\det A^T=\det A$；公式（幾何）：2×2 = 平行四邊形面積、3×3 = 體積 所以 $D=0$ 代表「被壓扁」= 向量線性相關。

解的數量：$\det A\neq0$ ⇒ 唯一解；$\det A=0$ ⇒ 無解或無限多組解（不可能剛好兩組解）

16 克拉瑪公式 p.22

$x_k=\frac{\det(A\text{ 的第 }k\text{ 行換成 }\vec{b})}{\det A}$・$\det A\neq0$ 白話：每個未知數 = 兩個行列式相除。分母永遠是同一個 $\det A$・只有分子在換行——求哪個未知數・就把哪一行換成常數向量。

限制：方程式條數 = 未知數個數；只問一個未知數時最快・n 大時改列運算或反矩陣（計算量小得多）。

17 反矩陣 p.22–23

$AA^{-1}=A^{-1}A=I$；若存在則唯一；$\det A=0\iff$ singular（沒有反矩陣）；$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$、$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 乘積的順序要反（跟轉置一樣）

求法 $[A\mid I]\xrightarrow{\text{列運算}}[I\mid A^{-1}]$ 白話：右邊的 I 是拿來「記錄」你對 A 做了哪些運算的；左半變 I 的那一刻・右半就是 A^{-1}。

2×2 速解 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ 主對角交換、副對角變號、除以行列式。

解方程組 $\vec{x}=A^{-1}\vec{B}$ 算完一定要把 AA^{-1} 乘回去驗算是不是 I

三大定理一句話

格林（平面）$\oint_C=\iint_R$：繞邊界走一圈 = 界內小旋轉總和。　**高斯**（立體）$\iint_S=\iiint_T$：封閉面通量 = 內部冒出量。　**斯托克斯**（曲面）$\oint_C=\iint_S$：邊界環流 = 曲面旋度通量。

共同句型：把「微分的東西」在裡面加起來 = 在邊界上看到的總量（微積分基本定理的立體版）。

格林是斯托克斯的平面特例。